MACIERZE LOSOWE
LISTA 1
Kombinatoryka liczb Catalana

Oznaczenia i definicje:
$[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$.
$\mathbb{N}$ =zbiór liczb naturalnych $= \{1, 2, \ldots\}$.
$\mathcal{P}_n$ - zbiór *partycji* zbioru $[n]$, czyli rodzin podzbiorów rozłącznych $\{V_1, \ldots, V_m\}$ zbioru $[n]$, zwanych *blokami*, takich że $[n] = V_1 \cup \ldots \cup V_m$.
$\mathcal{N}C_n$ - podzbiór zbioru $\mathcal{P}_n$ złożony z *partycji nieprzecinających się*, czyli takich, że jeżeli $i, j \in V_m$ oraz $k, l \in V_s$, gdzie $m \neq s$, to nie mogą zachodzić nierówności $i < k < j < l$.
$\mathcal{N}C_n^2$ - podzbiór zbioru $\mathcal{N}C_n$, gdzie n jest liczbą parzystą, złożony z *dwupartycji nieprzecinających się*, w których każdy blok składa się z 2 liczb.
$\mathcal{D}_n$ - zbiór dróg Catalana (dróg Dycka) na przedziale $[0, 2n]$.

1. Pokazać, że liczby Catalana spełniają rekurencję

$$C_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} C_j C_{n-j}$$

   dla $n \geq 0$, gdzie przyjmujemy $C_0 = 1$.

2. Pokazać, że liczby Catalana spełniają rekurencję

$$C_{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n+2} C_n$$

   dla $n \geq 0$, gdzie przyjmujemy $C_0 = 1$.

3. Przez *drogę Dycka* (lub *drogę Catalana*) rozumiemy wykres funkcji nieujemnej $f : [0, 2n] \to [n]$, takich że $f(0) = f(2n) = 0$ oraz $|f(j+1) - f(j)| \in \{1, -1\}$ dla każdego $j = 0, \ldots, 2n-1$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Alternatywnie możemy zdefiniować drogi Dycka tak jak na wykładzie, czyli jako odpowiednie drogi na kracie $\mathbb{Z}^2$. Wyznaczyć wszystkie drogi Dycka dla $n = 1, 2, 3$.

4. Pokazać, że liczba dróg Dycka na przedziale $[0, 2n]$ jest równa liczbie Catalana C_n (można np. wykazać, że liczby dróg Dycka spełniają rekurencję z zad. 1).

5. Przez *ukorzenione drzewo* o n wierzchołkach rozumiemy drzewo o n wierzchołkach, w którym jest wyróżniony wierzchołek zwany *korzeniem*. W takim drzewie *rodzicem* wierzchołka v jest wierzchołek v', z którym łączy się v na drodze prowadzącej z v do korzenia. Wtedy v jest *dzieckiem* wierzchołka v'. Każdy wierzchołek, za wyjątkiem korzenia, ma dokładnie jednego rodzica. Przez *ukorzenione drzewo uporządkowane* nazywamy ukorzenione drzewo, w którym dzieci każdego rodzica są uporządkowane. Oznaczmy przez $\mathcal{O}T_n$ zbiór ukorzenionych drzew uporządkowanych o n wierzhołkach. Wyznaczyć wszystkie ukorzenione drzewa uporządkowane o $2, 3, 4, 5$ wierzchołkach.

6. Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje bijekcja między $\mathcal{OT}_{n+1}$ oraz $\mathcal{NC}^2_{2n}$. Wyznaczyć jawną postać tej bijekcji dla $n = 2$ oraz $n = 3$ (Wskazówka: rozszerzyć dwupartycję $\pi \in \mathcal{NC}^2_{2n}$ do dwupartycji $\widetilde{\pi} = \pi \cup \{\{0, 2n+1\}\}$ zbioru $\{0, 1, 2, \ldots, 2n+1\}$ i wtedy zdefiniować naturalną bijekcję).

7. Pokazać, że istnieje naturalna bijekcja między $\mathcal{NC}^2_{2n}$ oraz $\mathcal{D}_n$. Łatwo ją zauważyć dla $n = 2, 3$ i uogólnić dla dowolnego n.

8. Wywnioskować z poprzednich zadań, jaki jest wzór na liczność zbioru $\mathcal{OT}_n$. Sprawdzić wzór z zadaniem 5 dla $n = 2, 3, 4, 5$.

9. Pokazać, że liczby Catalana dają parzyste momenty miary Wignera, tzn., że

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-2}^{2} x^n\sqrt{4-x^2}dx = \begin{cases} C_{n/2} & n \text{ parzyste} \\ 0 & n \text{ nieparzyste} \end{cases}$$

10. Pokazać, że jeżeli $G = (V, E)$ jest grafem skończonym i spójnym, to zachodzi nierówność

$$|V| \leq |E| + 1$$

oraz, że $|V| = |E| + 1$ wtedy i tylko wtedy gdy G jest drzewem.

Romuald Lenczewski